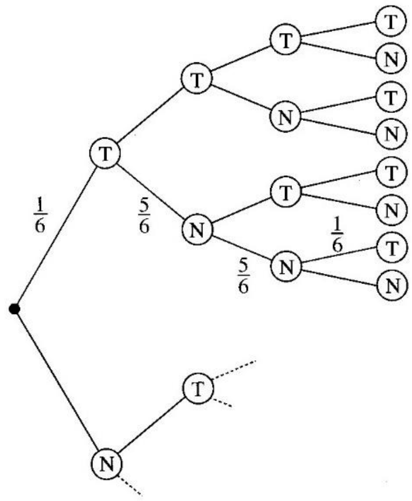
Die Binomialverteilung

Hans und Petra spielen Mensch ärgere dich nicht. Dabei muss man am Anfang eine Sechs würfeln, um seine Figur ins Rennen schicken zu können. Es sind hier also nur zwei Ausgänge des Würfelns interessant, und zwar Sechs und Nicht-Sechs. Ein Zufallsversuch wird als **Bernoulli-Versuch** bezeichnet, wenn es nur zwei Ausgänge T (Erfolg) und $\overline{T}$ (Niete) gibt. Führt man den Versuch mehrfach aus, spricht man von einer Bernoulli-Kette.

Beispiel: Bernoulli-Kette der Länge n = 4
Ein Würfel wird viermal geworfen. X sei die Anzahl der dabei geworfenen Sechsen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X = 2, d. h. für genau zwei Sechsen.

Lösung:
Es ist eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
Das Diagramm veranschaulicht die Kette als mehrstufigen Zufallsversuch.



Die Wahrscheinlichkeit eines Weges mit genau zwei Treffern und zwei Nieten beträgt nach der Produktregel $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Es gibt $\binom{4}{2}$ solcher Pfade, da man $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten hat, die beiden Treffer auf die vier Plätze eines Pfades zu verteilen.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet:
$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}1157$

Aufgabe: Überlege dir eine Beispielaufgabe für Bernoulli-Ketten und berechne die Wahrscheinlichkeiten.

Verallgemeinerung:

Liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p vor, so wird die Wahrscheinlichkeit für k Treffer mit **B(n;p;k)** bezeichnet. Sie kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$P(X = k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Aufgabe: Lehrer Müller kontrolliert die Hausaufaufgaben. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% sind die Hausaufgaben nicht gemacht. Daher wählt er vier Schüler aus und schaut hier gründlicher nach.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei den vier Schülern genau ein ohne Hausaufgaben dabei sind?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei den vier Schülern mindestens zwei ohne Hausaufgaben dabei sind?
c) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei den vier Schülern höchstens einer ohne Hausaufgaben dabei ist?

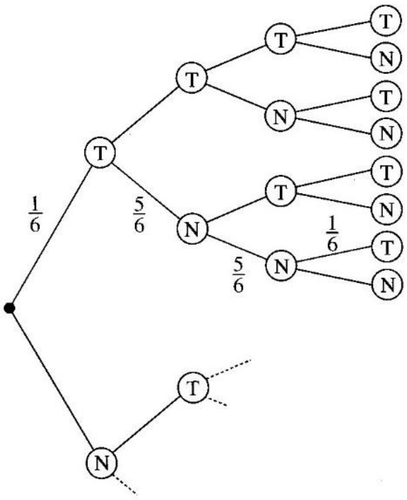
a)	b)	c)

Die Binomialverteilung - Lösung

Hans und Petra spielen Mensch ärgere dich nicht. Dabei muss man am Anfang eine Sechs würfeln, um seine Figur ins Rennen schicken zu können. Es sind hier also nur zwei Ausgänge des Würfelns interessant, und zwar Sechs und Nicht-Sechs. Ein Zufallsversuch wird als **Bernoulli-Versuch** bezeichnet, wenn es nur zwei Ausgänge T (Erfolg) und $\overline{T}$ (Niete) gibt. Führt man den Versuch mehrfach aus, spricht man von einer Bernoulli-Kette.

Beispiel: Bernoulli-Kette der Länge n = 4
Ein Würfel wird viermal geworfen. X sei die Anzahl der dabei geworfenen Sechsen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X = 2, d. h. für genau zwei Sechsen.

Lösung:
Es ist eine Bernoulli-Kette der Länge $n = 4$ mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$. Das Diagramm veranschaulicht die Kette als mehrstufigen Zufallsversuch.



Die Wahrscheinlichkeit eines Weges mit genau zwei Treffern und zwei Nieten beträgt nach der Produktregel $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Es gibt $\binom{4}{2}$ solcher Pfade, da man $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten hat, die beiden Treffer auf die vier Plätze eines Pfades zu verteilen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet:

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}1157$

Aufgabe: Überlege dir eine Beispielaufgabe für Bernoulli-Ketten und berechne die Wahrscheinlichkeiten.

Verallgemeinerung:
Liegt eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p vor, so wird die Wahrscheinlichkeit für k Treffer mit **B(n;p;k)** bezeichnet. Sie kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$P(X = k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Aufgabe: Lehrer S. kontrolliert die Hausaufaufgaben. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% sind die Hausaufgaben nicht gemacht. Daher wählt er vier Schüler aus und schaut hier gründlicher nach.

d) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei den vier Schülern genau einer ohne Hausaufgaben dabei sind?
e) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei den vier Schülern mindestens zwei ohne Hausaufgaben dabei sind?
f) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei den vier Schülern höchstens einer ohne Hausaufgaben dabei ist?

a)

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{4-1}$$

$$= \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$= 0{,}2916$$

b) $P(X \geq 2) =$

$P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$$\binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2$$

$$+ \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^1$$

$$+ \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^0$$

$$= 0{,}0486 + 0{,}0036 + 0{,}0001$$

$$= 0{,}0523$$

c)

$P(X \leq 1) =$

$P(X = 0) + P(X = 1)$

$$\binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4$$

$$+ \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$$= 0{,}6561 + 0{,}2916 = 0{,}9477$$